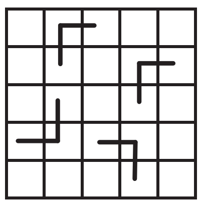
پاسخ تشریحی

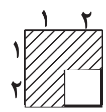
نهمین المپیاد کامپیوتر

۱. مجموعهٔ ۱۰ عضوی دارای $۲^{۱۰}$ یعنی ۱۰۲۴ زیرمجموعه است که مجموع اعضای نصف آنها زوج و مجموع اعضای نصف دیگر فرد است. پس جواب مورد نظر ۵۱۲ می‌باشد.

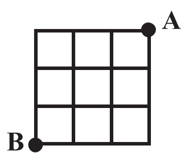
۲. هر یک از شبکه‌های ۲ × ۲ موجود در گوشه‌های مربع چنان باید باشند که حداقل دو خانه از هر یک از آنها پر شود زیرا در غیر این صورت شکل داده شده در آن جا می‌شود و در ضمن نمی‌توان شکلی چنان قرار داد که از خانه‌های دو تا از شبکه‌های مورد بحث را بپوشاند. بنابراین حداقل ۴ شکل لازم است. با ۴ شکل می‌توان مطابق جدول بالا به مطلوب رسید.



۳. برای گزینهٔ الف مثال نقضِ تهی وجود دارد. برای گزینهٔ ب مثال نقض مانند شکل مقابل وجود دارد.

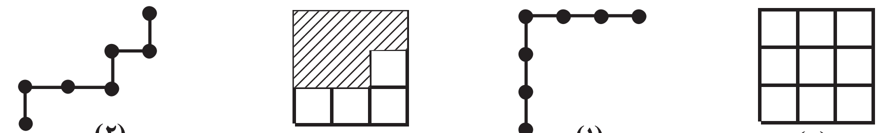


۴. به‌ازای هر مسیر با طول می‌نیمم (طول ۶) از A به B یک و فقط یک مجموعهٔ زیبا یافت می‌شود. به‌عنوان مثال برای مجموعهٔ زیبای a (تهی)



منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

مسیرِ ۱ و برای مجموعهٔ زیبای b مسیرِ ۲ متناظر هستند.



(a) (۱) (b) (۲)

تعداد مسیرهای مطلوب در یک شبکهٔ $m \times n$ برابر $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ و در این مسأله برابر $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ یعنی ۲۰ می‌باشد.

۵. وضعیت بمب‌ها و فتیله‌ها پس از سپری شدن اوقات مختلف مطابق شکل مقابل می‌باشد. مکان‌هایی که آتش در آنها باشد با دایرهٔ تو خالی نشان داده شده است.

۳ :

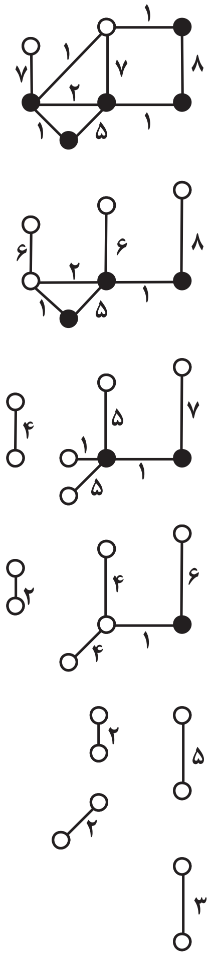
۴ :

۵ :

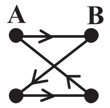
۶ :

۷ :

۸ :



۶. برای صحت گزینهٔ الف شکل مقابل وجود دارد:



اگر بازیکن i از A از بازیکن j از B باخته باشد آنگاه i نمی‌تواند برندهٔ مطلق باشد زیرا بازیکن‌هایی که j را برده‌اند از دبیرستان A بوده و با i بازی نکرده‌اند. پس بازیکنی که حتی یک باخت داشته باشد نمی‌تواند برنده مطلق باشد. اگر بازیکن‌های i و j هر دو برندهٔ مطلق باشند آنگاه i و j نمی‌توانند در دو دبیرستان متفاوت باشند زیرا اگر i از j برده باشد آنگاه j حداقل یک باخت داشته و نمی‌تواند برندهٔ مطلق باشد. و اما اگر i و j از یک دبیرستان باشند و هر دو تای آنها همهٔ دانش‌آموزان دبیرستان دیگر را برده باشند آنگاه بازیکن i بازیکن j را به واسطه نبرده است و نمی‌تواند برندهٔ مطلق محسوب شود.

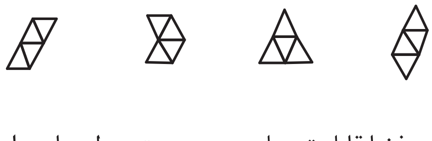
۷. شیوهٔ ساخته شدن n عدد n از روی n عدد ۱ را در نظر می‌گیریم. با عمل کردن به شیوهٔ عکس به n عدد ۱ می‌رسیم. به این منظور n عدد n را دو به دو در نظر گرفته و اعداد تولیدکنندهٔ آنها را می‌نویسیم. اگر n فرد باشد یک عدد n باقی مانده و هرگز از آن ۱ تبدیل نخواهد شد. پس شرط لازم برای رسیدن به مطلوب آن است که n زوج باشد. برای ۱۶ = n شیوهٔ زیر را عمل می‌کنیم:

● ابتدا ۱۶ عدد را دوبه‌دو در نظر گرفته و آنها را به ۱۶ عدد ۲ و سپس آنها را به ۱۶ عدد ۴ و سپس آنها را به ۱۶ عدد ۸ و در نهایت با دسته‌بندی آن اعداد در ۸ زوج دوتایی آنها را به ۱۶ عدد ۱۶ تبدیل می‌کنیم.

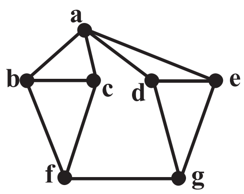
۸. طریقه تقسیم سوخت‌ها مطابق شکل مقابل می‌باشد:

	۱	۲	۳
۱	–	۴	۱۶
۲	۱۲	۸	–

۹. تمام مثلث‌بندی‌های مطلوب به شکل زیر می‌باشد:



لازم به ذکر است که شکل‌های اول و آخر با دوران در فضا قابل تبدیل به هم هستند ولی با دوران در صفحه به هم نمی‌توانند تبدیل شوند.

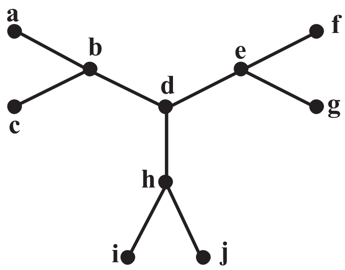


۱۰. سه رأس a، d و e سه رنگ متمایز دارند و نیز سه رأس g، d و e نیز سه رنگ متمایز دارند، بنابراین اگر بخواهیم رئوس را فقط با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه a و g هم‌رنگ خواهند بود. به همین ترتیب معلوم می‌شود که a و f هم‌رنگ هستند که در این صورت دو رأس f و g که به هم وصل هستند هم‌رنگ شده و با فرض داده شده تناقض ایجاد می‌کند.

شکل داده شده را با ۴ نوع رنگ به شکل زیر می‌توان رنگ کرد:

آبی : b , e	سبز : a , g
زرد : f	قرمز : d , c

و همچنین قابل بررسی است که با حذف هر یال رنگ‌آمیزی شکل با سه رنگ امکان‌پذیر است.



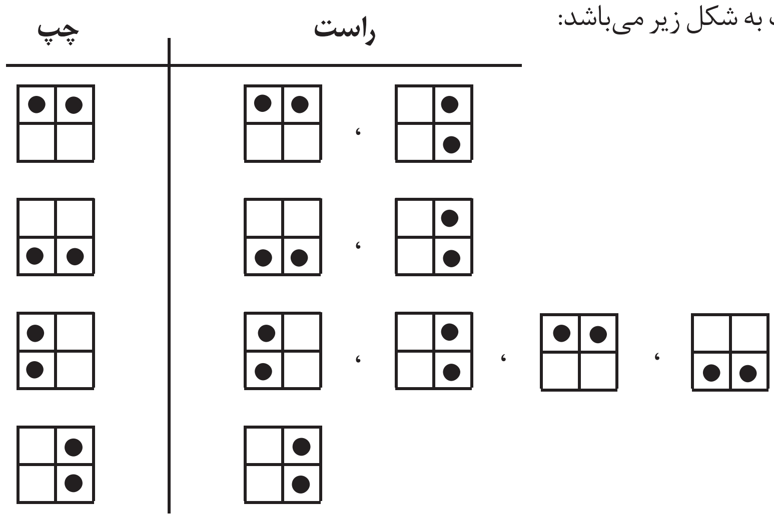
۱۱. مسیری که طول آن ماکزیمم باشد مسیر اصلی در نظر می‌گیریم که با توجه به اعداد داده شده مسیرِ fedhj مسیر اصلی می‌باشد. با محاسبه معلوم می‌شود که در این حالت مجموع مسافات پیموده شده برابر ۴۷ کیلومتر می‌شود.

۱۲. اگر افراد را a، b، c، d و e درنظر بگیریم معلوم است که با تشکیل سه جلسهٔ abc، edc و abc می‌توان به‌منظور رسید.

۱۳. شرط لازم برای رسیدن به مطلوب آن است که مجموع اعداد اولیه زوج باشد، زیرا در هر مرحله دو برابر عدد کوچکترِ حذف شده از مجموع اعداد کم شده و در نهایت به صفر می‌رسد. مجموع اعداد موجود در هر یک از حالات ۲ و ۳ فرد بوده و شرط لازم را ندارند. و اما رسیدن به‌منظور در حالت اول به شیوهٔ زیر می‌باشد:

۸,۵,۳,۲,۱,۱ ⟵ ۳,۳,۲,۱,۱ ⟵ ۳,۱,۱,۱ ⟵ ۲,۱,۱ ⟵ ۱,۱ ⟵ ۰

۱۴. معلوم است که در هر یک از دو شبکهٔ ۲ × ۲ موجود در سمت چپ و نیز سمت راست شکل حداکثر دو مهره می‌تواند قرار گیرد و چون در شکل دقیقاً ۴ مهره موجود است پس در هر یک از آن شبکه‌ها دقیقاً ۲ مهره موجود خواهد بود. طرق قرار دادن دو مهره در شبکهٔ سمت چپ و به دنبال آن قرار دادن دو مهره در شبکهٔ سمت راست به شکل زیر می‌باشد:



۱۵. با اطلاعات داده شده معلوم می‌شود که افراد فرد و زوج یک در میان هستند، یعنی در شکل مقابل مربعها با اعداد فرد و دایره‌ها با اعداد زوج پر شده‌اند: □ ○ □ ○ □ ○ □

دایرهٔ وسط یقیناً عدد ۴ می‌باشد بنابراین به دو حالت دو دایرهٔ دیگر را می‌توان با اعداد ۲ و ۶ پر کرد. یکی از دو مربع میانی عدد ۱ می‌باشد یعنی به دو حالت می‌توان عدد ۱ را پر کرده و به تناسب آن عدد ۷ مکانِ منحصر به‌فرد پیدا خواهد کرد به این صورت که اگر عدد ۱ در مربع دوم (یا سوم) از سمت چپ قرار گیرد عدد ۷ در مربع چهارم (یا اول) از سمت چپ قرار خواهد گرفت. و در نهایت در دو مربع باقی‌مانده دو عدد ۳ و ۵ را به دو حالت می‌توان قرار داد که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر ۲ × ۲ × ۲ یعنی ۸ خواهد شد.

۱۶. خانهٔ B را به دو طریق و به تناسب آن خانهٔ A را نیز به دو طریق می‌توان پر کرد، پس از پر کردن آن دو کل جدول به‌صورت منحصربه‌فرد پر می‌شود، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۲ × ۲ یعنی ۴ می‌باشد.

A	B	
	۳	

۱۷. هر یک از دو زوج یال‌های موجود در سمت چپ و راست شکل را به‌طور مستقل از یکدیگر به سه طریق می‌توان جهت‌دار کرد. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر ۳ × ۳ یعنی ۹ می‌باشد.

۱۸. بیشترین جابه‌جایی موقعی اتفاق می‌افتد که دنباله به‌صورت $a_1 b_1\ a_2 b_2 \ldots a_k\, b_k$ یا $a_1 b_1\ a_2 b_2 \ldots a_k\, b_k\, a_{k+1}$ بوده و هر دو دنبالهٔ a_i ها و b_i ها صعودی بوده و b_k از a_1 کوچکتر باشد، در این صورت دنبالهٔ صعودی مورد نظر به شکل $b_1\, b_2 \ldots b_k\, a_1\, a_2 \ldots a_k$ یا $b_1\, b_2 \ldots b_k\, a_1\, a_2 \ldots a_{k+1}$ مرتب می‌شود و بیشترین جابه‌جایی در این حالت مربوط به b_k است که به اندازهٔ k واحد یا $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ واحد جابه‌جا شده است.

۱۹. تعداد اعداد ۷ رقمی در مبنای ۲ که تعداد ۱ های آنها ۴ و تعداد ۰ های آنها ۳ باشد برابر $\binom{6}{3}$ یعنی ۲۰ می‌باشد (زیرا رقم سمت چپ قطعاً ۱ است). این اعداد را دستهٔ A می‌نامیم.

تعداد اعداد ۷ رقمی در مبنای ۲ که تعداد ۱ های آنها ۳ و تعداد ۰ های آنها ۴ باشد برابر $\binom{6}{2}$ یعنی ۱۵ می‌باشد (زیرا رقم سمت چپ قطعاً ۱ است). این اعداد را دستهٔ B می‌نامیم.

هر عدد از دستهٔ A دقیقاً به سه عدد از B متصل می‌شود (رقم یک موجود در سمت چپ عدد را نمی‌توانیم صفر کنیم ولی اگر هر رقم یک دیگر موجود در آن عدد را صفر کنیم یک عدد از دستهٔ B تولید می‌شود). بنابراین تعداد کل پاره‌خط‌های تولید شده برابر ۳ × ۲۰ یعنی ۶۰ خواهد شد، که متأسفانه در گزینه‌ها نیامده است.

۲۰. تاس را چنان روی زمین قرار می‌دهیم که عدد ۶ روی زمین و عدد ۵ سمت راست قرار گیرد که در این حالت یقیناً عدد ۱ بالا و عدد ۲ سمت چپ قرار خواهند گرفت. دو حالت پیش می‌آید، عدد ۳ مقابل بوده و عدد ۴ پشت باشد و یا برعکس.

۲۱. با توجه به تعریف دنبالهٔ متنوع معلوم می‌شود که شرط لازم برای متنوع بودن دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ آن است که دنبالهٔ a_0, a_2, a_4, a_6 و به دنبال آن دنبالهٔ a_0, a_4 متنوع باشند. چون هر دو عضو متوالی یک دنباله متمایز هستند پس عدد a_0 را به ۳ طریق و عدد a_4 را به دو طریق از بین اعداد ۰، ۱ و ۲ می‌توان انتخاب کرد یعنی ۶ نوع دنبالهٔ متنوع متمایز به‌صورت a_0, a_4 وجود دارد. در دنبالهٔ a_0, a_2, a_4, a_6 پس از معلوم شدن a_0 و a_4 عضو a_2 به یک طریق (چون در وسط قرار گرفته است) و عضو a_6 به دو طریق (متمایز با a_4) مشخص می‌شوند. چون ۶ نوع دنبالهٔ متمایز a_0, a_4 ایجاد شده

بنابراین طبق اصل ضرب ۲ × ۱ × ۶ یعنی ۱۲ دنبالهٔ متنوع به‌صورت a_0 , a_2 , a_4 , a_6 می‌توان ایجاد کرد. چون در دنبالهٔ اولیه هر یک از اعضای a_1، a_2 و a_3 بین دو عضو دیگر قرار گرفته‌اند پس هر یک از آنها به‌صورت منحصربه‌فرد مشخص خواهند شد، بنابراین جواب مورد نظر ۱۲ می‌باشد.

۲۲. شیوهٔ حرکت برای رسیدن به B در بهترین حالت به شکل زیر می‌باشد:

۱. سه واحد بالا ۲. دو واحد پایین ۳. دو واحد راست

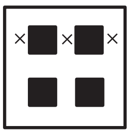
۴. دو واحد راست ۵. دو واحد بالا

شیوهٔ حرکت برای رسیدن به C نیز در بهترین حالات به شکل زیر می‌باشد:

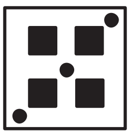
۱. سه واحد بالا ۲. دو واحد راست ۳. دو واحد بالا ۴. سه واحد راست

۲۳. اگر ستون اول را از پایین به بالا با اعداد ۱، ۲، ...، ۸ و همچنین سطر آخر را با همان اعداد از چپ به راست پر کنیم آنگاه اعداد موجود در قطر فرعی از پایین به بالا به‌ترتیب برابر ۱، ۳، ۵، ...، ۱۵ خواهد شد. به راحتی معلوم می‌شود که مابقی اعداد همگی اعدادی بین ۱ و ۱۵ می‌باشند.

۲۴. اگر سه نقطه مطابق شکل (۱) در نظر بگیریم معلوم می‌شود که هیچ دو تایی از آنها نقطهٔ اولیهٔ مشترک ندارند بنابراین وجود حداقل سه نقطهٔ اولیه الزامی است. اگر سه نقطهٔ اولیه مطابق شکل (۲) باشند آنگاه تمام نقاط سفید رنگ پوشش داده می‌شوند.



(۱)



(۲)

۲۵. اگر تعداد فردها را a و تعداد زوج‌ها را a - ۵ در نظر بگیریم آنگاه تعداد اعداد فرد تولید شده برابر $\binom{a}{1}\binom{5-a}{1}$ خواهد شد، بنابراین:

$$\binom{a}{1}\binom{5-a}{1} = 4 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 4$$

اگر $a = 1$ یعنی فقط یک عدد فرد داشته باشیم و آن را x و اعداد زوج را y_1، y_2، y_3 و y_4 بنامیم آنگاه:

$x + y_1 = 7$ $\quad$ $x + y_3 = 11$

$x + y_2 = 9$ $\quad$ $x + y_4 = 15$

از تساوی‌های فوق معلوم می‌شود که اعداد زوج به‌ترتیب به‌صورت $y_۱$، $y_۱ + ۲$، $y_۱ + ۴$ و $y_۱ + ۸$ می‌باشند معلوم است که کوچکترین اعداد یعنی ۸ را دو عدد $y_۱$ و $y_۱ + ۲$ تولید می‌کنند بنابراین $۲y_۱ + ۲ = ۸$ یا $y_۱ = ۳$ و این با زوج بودن $y_۱$ در تضاد است.

۲۶. در هر مرحله تعویض، عدد i در خانهٔ i قرار می‌گیرد یعنی در هر مرحله تعویض حداقل یک عنصر در جای خود قرار می‌گیرد بنابراین حداکثر ۹ تعویض لازم است (لازم به ذکر است که اگر دقیقاً ۹ عدد در جایگاه خود باشند عدد دهم نیز به ناچار در جایگاه خود خواهد بود).

۲۷. اعداد را به شکل زیر به سه دستهٔ A، B و C تقسیم می‌کنیم:

A:۳,۶,۹

B:۲,۵,۸

C:۱,۴,۷

برای آن که مجموع اعداد بر ۳ بخش‌پذیر باشد لازم است هر سه عدد از یک دسته بوده و یا هر یک از آن اعداد از یک دسته باشند بنابراین:

$$? = ۳\times \binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱} = ۳+۲۷=۳۰$$

۲۸. در هر یک از شش حالت زیر به‌ترتیب a، b، c، x، y و z سومین عضو دنباله می‌باشند:

۱) $x< y< a< z< b< c$

۲) $x< a< b< c< y< z$

۳) $a< b< c< x< y< z$

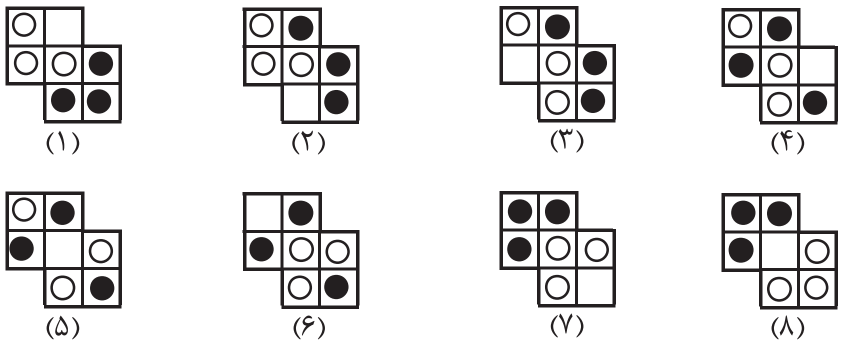
۴) $a< b< x< y< z< c$

۵) $a< x< y< z< b< c$

۶) $x< y< z< a< b< c$

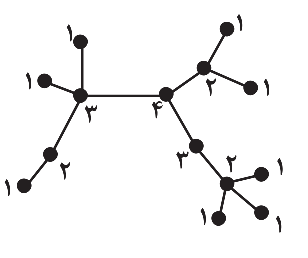
۲۹. اگر تعداد پلیس‌ها ۲ باشد دزد همیشه برای فرار راهی در پیش دارد (چون هر تقاطع سه راه است) و اما اگر تعداد پلیس‌ها ۳ باشد آن سه می‌توانند در هر شرایطی خود را به جایی رسانند که دزد را محاصره کرده و او را دستگیر کنند.

۳۰. بهترین حرکت به شکل زیر است که ۸ مرحله طول می‌کشد:



برای ورود مهره‌های سفید به خانه‌های جدید ۳ حرکت و برای ورود مهره‌های سیاه به خانه‌های جدید ۳ حرکت لازم است (مجموعاً ۶ حرکت). چون در انتقال مهره‌ها ناگزیر از خانهٔ وسط کمک می‌گیریم بنابراین دو حرکت نیز برای ورود مهره به خانهٔ وسط (که متمایز از حرکات قبلی است) لازم است (مراحل اول و ششم). لازم به ذکر است که با یک بار ورود و خروج یک مهره به خانهٔ وسط (نه بیشتر) تعداد حرکات لازم بیش از ۸ شده و مطلوب نمی‌باشد. با جمع زدن تعداد حرکات فوق معلوم می‌شود که برای رسیدن به مطلوب حداقل ۸ حرکت لازم است.

۳۱. بهترین حالت ممکن به شکل روبه‌رو می‌باشد:



۳۲. کوچکترین عضو زیرمجموعهٔ مطلوب را i می‌نامیم که دو حالت پیش می‌آید:

I) $1 \le i \le 9$. در این حالت هیچ یک از اعضای $i+1$، $i+2$، ...، $20-i$ نمی‌توانند در آن زیرمجموعه باشند و اما هر یک از اعضای $20-i+1$، $20-i+2$، ...، و ۲۰ دو حالت در آن زیرمجموعه می‌توانند داشته باشند، عضو بودن در آن زیرمجموعه و یا عضو نبودن آن (حالتی که هیچ یک از آن اعضا عضو زیرمجموعهٔ مورد نظر نباشند را نمی‌شماریم زیرا در این صورت زیرمجموعهٔ مورد نظر فقط شامل i بوده و یک عضوی است). بنابراین در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر برابر $2^{i}-1$ می‌باشد.

II) $۱۰ \le i \le ۱۹$. در این حالت همهٔ اعضا بزرگتر از i دو حالت در آن زیرمجموعه می‌توانند داشته باشند، عضو بودن در آن زیرمجموعه و یا عضو نبودن آن (حالتی که هیچ یک از آن اعضا عضو زیرمجموعهٔ مورد نظر نباشند را نمی‌شماریم). بنابراین در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر $۲^{۲۰-i} - ۱$ خواهد شد.

با در نظر گرفتن دو حالت فوق تعداد کل زیرمجموعه‌های مطلوب به شکل زیر پیدا خواهد شد:

$$? = [(۲^{۱} - ۱) + (۲^{۲} - ۱) + ... + (۲^{۹} - ۱)] + [(۲^{۱۰} - ۱) + (۲^{۹} - ۱) + ... + (۲^{۱} - ۱)]$$

$$= ۲^{۱۰} + ۲(۲^{۱} + ۲^{۲} + ... + ۲^{۹}) - ۱۹ = ۲^{۱۰} + ۲(۲^{۱۰} - ۲) - ۱۹$$

۳۳. به‌راحتی قابل درک است که در یک عبارت جالب تعداد b ها نمی‌تواند از تعداد a ها بیشتر باشد بنابراین گزینهٔ ج نمی‌تواند صحیح باشد. همچنین یک عبارت جالب نمی‌تواند به‌صورت ... bbabb ... باشد زیرا اگر a به همراه b ی سمت راست خود آمده باشد آنگاه در سمت چپ آن bb و اگر a به‌همراه b ی سمت چپ خود آمده باشد آنگاه در سمت راست آن bb نمی‌تواند تولید شود.

۳۴. تمام اعدادی که رقم سمت چپ آنها ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد قبل از عدد داده شده می‌باشند، تعداد این اعداد بر $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۴$ یعنی ۴۸۰ می‌باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آنها ۲ و رقم دومشان ۵ یا ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد نیز برابر $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۲ \times ۱$ یعنی ۴۸ می‌باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آنها ۲ و رقم دومشان ۴ و رقم سومشان یکی از ارقام ۵ یا ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱$ یعنی ۱۲ می‌باشد.

تمام اعدادی که رقم اول آنها ۲ و رقم دومشان ۴، رقم سومشان ۳ و رقم چهارمشان ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $۱ \times ۲ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱$ یعنی ۲ می‌باشد.

تمام اعدادی که رقم اول، دوم، سوم و چهارم آنها به‌ترتیب ۲، ۳ و ۵ بوده و رقم پنجمشان ۶ باشد قبل از عدد داده شده قرار دارند که تعداد این اعداد برابر $۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱$ یعنی ۱ می‌باشد.

بنابراین مجموعاً $۱ + ۲ + ۱۲ + ۴۸ + ۴۸۰$ یعنی ۵۴۳ عدد قبل از عدد داده شده قرار دارد و عدد مطلوب پانصد و چهل و چهارمین عدد می‌باشد.

۳۵. یکی از سه حالت زیر می‌تواند جواب باشد:

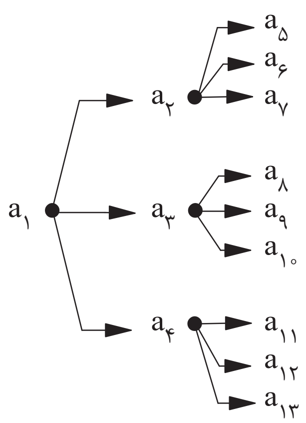
I) ۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AB و DC

II) ۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AD و BC

III) ۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AC و BD

۳۶. تعداد کل مسیرهای اشاره شده برابر $\binom{۵}{۲}$ یعنی ۱۰ می‌باشد که هر یک برای خود دنباله‌ای را تولید می‌کنند که دنباله‌های abcbc ، abefc و abeaa هر یک دو بار تولید می‌شوند. بنابراین تعداد کل دنباله‌های متمایز تولید شده برابر ۳ - ۱۰ یعنی ۷ خواهد شد.

۳۷. عدد ۹۷ هیچ مولدی ندارد و اما مولدهای عدد ۱۰۱ اعداد ۱۰۰ و ۹۱ می‌باشند.



۳۸. باید درخت موجود در شکل مقابل را تکمیل کنیم («$x \bullet\!\longrightarrow y$» نشانگر آن است که عدد x از عدد y کوچکتر است).

عدد $a_۱$ کوچکترین عدد ممکن یعنی ۱ می‌باشد. حال ۱۲ عدد باقی‌مانده را به سه دستهٔ چهارتایی تقسیم می‌کنیم تا به شاخه‌های $a_۱$ اختصاص دهیم که این کار به $\binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۴}\binom{۴}{۴}$ طریق ممکن است. در بین دستهٔ اول کوچکترین عدد را به $a_۲$ و سه عدد دیگر را به **!۳** طریق بین $a_۵$ و $a_۶$ و $a_۷$ تقسیم می‌کنیم. دسته‌های دیگر را نیز به همین صورت بین a_i های باقی‌مانده تقسیم می‌کنیم، بنابراین جواب مورد نظر برابر $\binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۴}\times(۳!)^۳$ خواهد شد که جواب صحیح در بین گزینه‌های نیامده است.

۳۹. تمام حالات ممکن به شکل زیر می‌باشند:

I) ۹,۵   II) ۹,۳,۲   III) ۷,۵,۲

۴۰. شهر متصل به D یکی از شهرهای A، B یا C می‌باشد زیرا اگر D به E متصل باشد آنگاه شهر D به غیر از E به هیچ شهر دیگری مسیر نخواهد داشت. به همین صورت E نیز به یکی از شهرهای A، B یا C (به غیر از شهری که D به آن متصل است) وصل خواهد بود. بنابراین تعداد جواب‌های ممکن برابر ۲ × ۳ یعنی ۶ خواهد بود.

۴۱. چون عضو اولِ دنباله یعنی ۱۴۴ بر ۹ بخش‌پذیر است پس مجموع ارقام آن نیز بر ۹ بخش‌پذیر بوده و حاصل‌ضرب آن مجموع در هر مقسوم‌علیهی باز مضرب ۹ خواهد بود به همین ترتیب معلوم می‌شود که همهٔ اعضای دنباله مضرب ۹ می‌باشد در حالی که عدد ۸۰۹۲ مضرب ۹ نمی‌باشد.

۴۲. اعضای دنباله را به شکل زیر می‌سازیم:

$a_۱ = ۱۸۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ \qquad a_۲ = (۵^۱) \times (۳^۲ \times ۵^۱) = ۳^۲ \times ۵^۲$

$a_۳ = (۳^۱ \times ۵^۱) \times (۳^۲ \times ۵^۲) = ۳^۳ \times ۵^۳ = ۳۳۷۵$

۴۳. فرض می‌کنیم α برابرِ داروی اول را با β برابرِ داروی دوم مخلوط کنیم آنگاه خواهیم داشت:

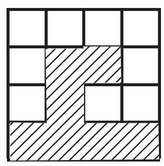
$$\left.\begin{array}{l} ۳\alpha + \beta = ۳ \\ ۷\alpha + ۲\beta = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = -۲ \quad , \quad \beta = ۹$$

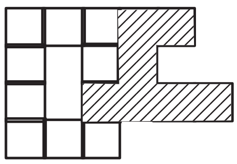
$$\alpha + ۳\beta = ۵$$

از دو معادلهٔ اول مقادیر α و β به‌ترتیب برابر ۲- و ۹ به‌دست می‌آیند که اولاً منفی بودن α بی‌معنی است و ثانیاً مقادیر به‌دست آمده در معادلهٔ سوم صدق نمی‌کنند.

۴۴. در مرحله دوم دنبالهٔ $a_۸ , a_۷ , a_۶$ صعودی می‌باشد و چون آن سه عدد از $a_۵$ ، $a_۴$ ، $a_۳$ بزرگتر بوده و طبق عمل اول این سه عدد نیز از $a_۲$ و $a_۱$ بزرگترند پس از عمل دوم $a_۸$ ، $a_۷$ و $a_۶$ و به همین‌ترتیب بزرگترین اعداد می‌باشند. در مرحلهٔ سوم نیز پنج عضو نخست به‌ترتیب صعودی نوشته می‌شوند.

۴۵. مطابق شکل مقابل:



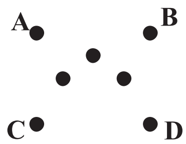


۴۶. به همهٔ نقاط عدد یکسانِ n را نسبت دهید.

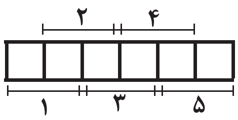
۴۷. ابتدا بازی‌کن اول یک X در خانهٔ وسط قرار می‌دهد که در این صورت بازی‌کن دوم فقط می‌تواند در دو ستون اول و سوم و یا در دو سطر اول و سوم برنده شود. اما در هر خانه‌ای که بازی‌کن دوم O قرار دهد در سطر یا ستون مربوطه نفر اول یک X قرار داده و مانع از برنده شدن نفر دوم می‌شود.

۴۸. اگر در بین توپ‌های آبی هم یک کیلویی داشته باشیم و هم دو کیلویی، آنگاه از توپ‌های قرمز را انتخاب می‌کنیم این توپ چه یک کیلویی باشد و چه دو کیلویی، مسأله را حل می‌کند. و اما اگر همهٔ توپ‌های آبی یک کیلویی (یا دو کیلویی) باشند آنگاه قطعاً در بین توپ‌های قرمز توپ دو کیلویی (یا یک کیلویی) وجود دارد.

۴۹. کافی است قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به نقطهٔ C و قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نقطهٔ D به‌دست آوریم.



۵۰. خانه‌ها را مطابق شکل مقابل به زوج‌های ۱ تا ۵ تقسیم می‌کنیم. برای این که خانهٔ سمت چپ از رو به پشت تبدیل شود باید زوج ۱ فرد بار انتخاب شود. برای این که خانهٔ دوم از سمت چپ از رو به پشت تبدیل شود باید فرد بار انتخاب شود یعنی تعداد انتخاب‌های زوج ۲ و ۱ بر روی هم فرد باشد و چون تعداد انتخاب‌های زوج ۱ فرد بار بود، تعداد انتخاب‌های زوج ۲ باید زوج بار باشد. به همین ترتیب معلوم می‌شود تعداد انتخاب‌های زوج ۳ فرد، تعداد انتخاب‌های زوج ۴ زوج بار و بالاخره تعداد انتخاب‌های زوج ۵ فرد بار خواهد بود بنابراین تعداد کل انتخاب‌ها برابر «فرد + زوج + فرد + زوج + فرد» یعنی فرد می‌تواند باشد.



۵۱. شبکهٔ ۱۰ × ۱۰ نقطه‌ای در وسط به‌صورت مرکز تقارن دارد. هر عددی که بازی‌کن اول در یک خانه قرار دهد بازی‌کن دوم همان عدد را در قرینهٔ آن خانه نسبت به نقطهٔ مورد اشاره قرار می‌دهد و هرگز بازنده نمی‌شود.

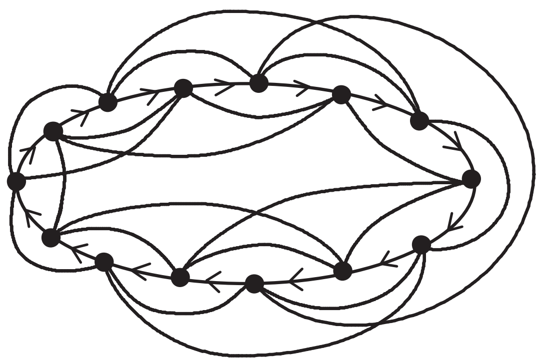
۵۲. A را برابر ۱۲ و B را برابر ۹۸۱ در نظر می‌گیریم:

$۲۱ + ۱۸۹ = ۲۱۰ \longrightarrow$ مجموع A و B در مبنای معکوس = ۱۲ = A

۵۳. اگر بازی‌کن اول پاره‌خط وسط را رسم کند یقیناً برنده می‌شود.

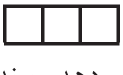
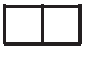
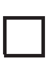
۵۴. بزرگترین مجموع برابر ۱۰+ و کوچکترین مجموع برابر ۱۰- می‌باشد و در این فاصله مجموعاً ۲۱ عدد صحیح وجود دارد، در حالی که تعداد سطرها، ستون‌ها و دو قطر بر روی هم ۲۲ می‌باشد بنابراین حداقل یک عضو تکراری خواهیم داشت.

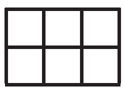
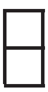
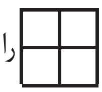
۵۵. در شکل مقابل یال‌های جهت دار نشانگر آشنایی‌های یک طرفه و یال‌های بدون جهت نشانگر آشنایی‌های دو طرفه است.



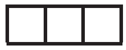
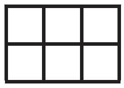
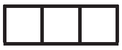
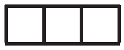
۵۶. محدودیت‌های لازم می‌تواند به شکل (a , ۱)، (b , ۱)، (a , ۲)، (c , ۳) و (c , ۴) باشد.

۵۷.

اگر نفر اول شکلی به‌صورت  را تحویل نفر دوم دهد آنگاه نفر دوم شکل  را حذف و  را تحویل نفر اول می‌دهد و برنده می‌شود.

اگر نفر اول شکلی به‌صورت  را تحویل نفر دوم دهد نفر دوم شکل  را حذف و شکل  را تحویل نفر اول می‌دهد. نفر اول به ناچار شکلی به‌صورت  تحویل نفر دوم داده و سپس شکلی به‌صورت  از او تحویل گرفته و بازنده می‌شود.

۵۸.

نفر اول شکل را به دو قسمت  و  تقسیم می‌کند، نفر دوم اولی را حذف و دومی را به دو شکل به‌صورت  و  تقسیم می‌کند. نفر اول یکی را حذف ودیگری را به ناچار به‌صورت  و  تقسیم می‌کند. نفر دوم اولی را حذف و دومی رابه‌صورت  و  تقسیم کرده و برنده می‌شود.

۵۹. فرض می‌کنیم در ابتدا دزد و پلیس در دو تقاطع مجاور باشند چون شروع حرکت با دزد است، ابتدا دزد به تقاطعی که پلیس در آن است می‌رود و از آن به بعد به هر تقاطعی که پلیس رود، دزد به همان تقاطع می‌رود.

۶۰. هرگز b های مجاور هم نمی‌توانند از هم جدا شوند.