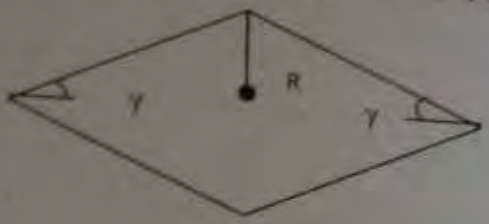
شنبه ۹۲/۹/۲۰

بسمه تعالی

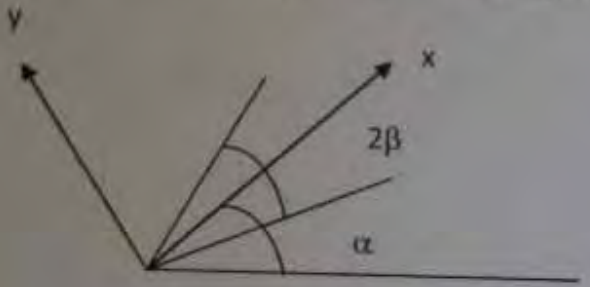
امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره‌ی دهم)

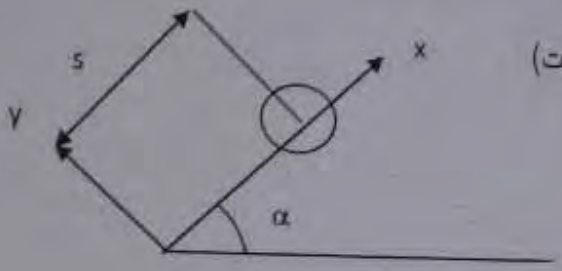
مسئله ۱)

جسمی از چسباندن دو مخروط که جرم هر یک M می باشد، تشکیل شده است. توزیع جرم در هر یک از این مخروط ها یکنواخت است.



دو میله که با یکدیگر زاویه 2β می سازند تشکیل ریلی شبیه سطح شیبدار را داده اند بگونه ای که نیم ساز شان(محور x) با افق زاویه α می سازد (قاعده دو مخروط در صفحهٔ xy است)

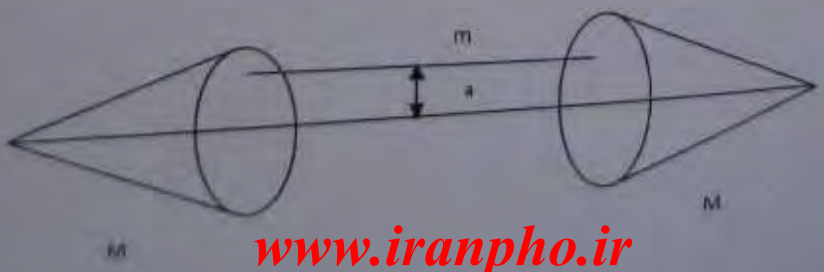




الف) پتانسیل گرانشی جسم را بر حسب S (مسافت طی شده در راستای x) بیابد.

ب) شرطی بین α,β,γ بیابید بگو نه ای که اگر جسم را روی سطح قرار دادیم شروع به بالا رفتن روی سطح بکند.

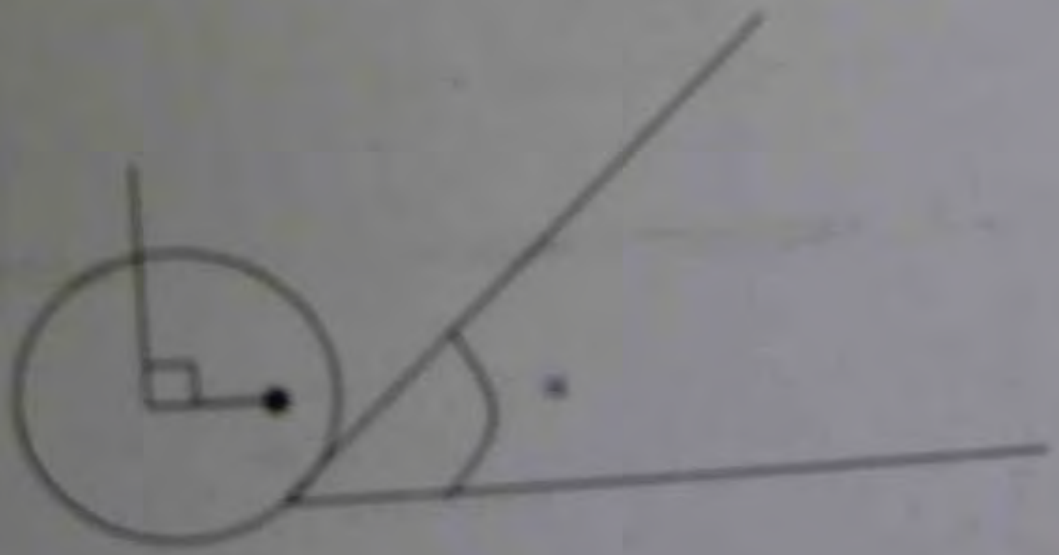
ج) حالا فرض کنید این دومخروط توسط میله ای به جرم m که با محور دو مخروط فاصله a دارد به هم متصل شده اند و شرط قسمت (ب) هم برقرار باشد. معادلهٔ حرکت جسم را بنویسید. (رابطه بین s و s و t)



www.iranpho.ir

د) مطابق شکل در ابتدا ($x = 0$) خط واصل میله تا محور مخروط ها با قائم زاویهٔ $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ می سازد.

نقاط تعادل سیستم را بیابید و بعد از مشخص نمودن نوع تعادل در صورت پایدار بودن، فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه یا نقاط تعادل را به دست آورید.

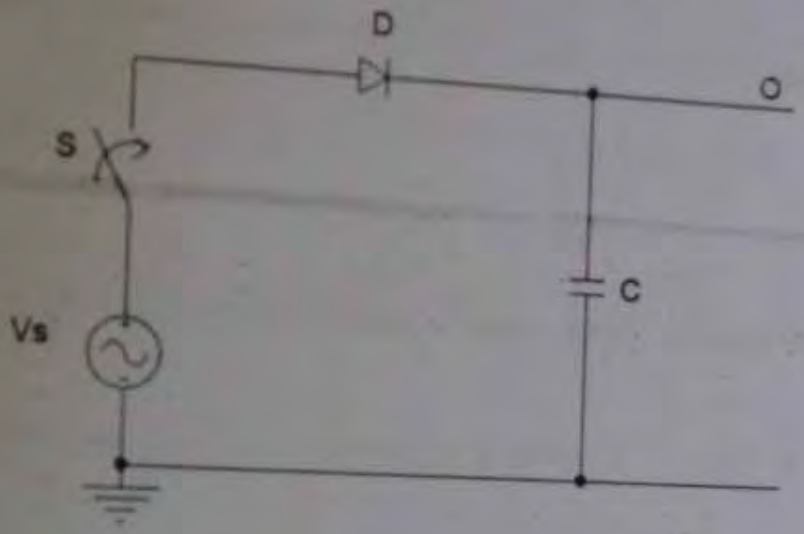


www.iranpho.ir

مسئله‌ی ۲)

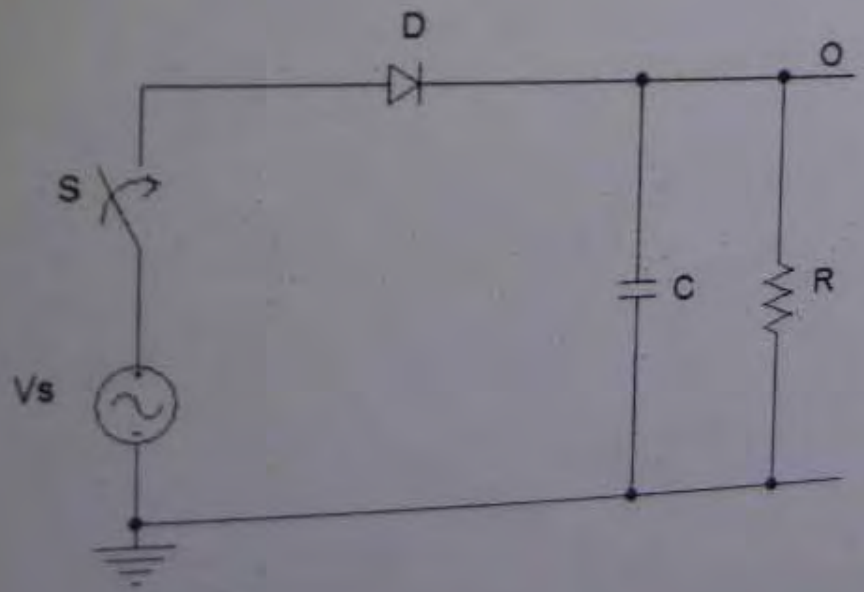
در مدار شکل های ۱ و ۲، فرض کنید دیود D ایده آل است و ولتاژ منبع متناوب برحسب زمان با رابطه‌ی $v_s(t) = \varepsilon \sin \omega t$ داده می شود که ε و ω ثوابت مثبتی هستند. در هر دو مدار، کلید S در لحظه‌ی $t = 0$ وصل می‌شود و خازن C پیش از وصل کلید، بدون بار است.

الف) در مدار شکل ۱، نمودار ولتاژ گره O مشخص شده در شکل را بر حسب زمان رسم کنید. (۱ نمره)



شکل ۱

حال مطابق شکل ۲، مقاومت R در مدار قرار داده می شود.



www.iranpho.ir

ب) برای اولین بار پس از لحظه‌ی $t = 0$ در $t = t_0$ جریان گذرنده از دیود صفر می‌شود. معادله ای بنویسید که بتوان از روی آن t_0 را به دست آورد. (۲ نمره)

پ) نمودار ولتاژ گره O مشخص شده در شکل ۲ را بر حسب زمان رسم کنید. (۳ نمره)

مدار شکل ۲ را برای زمان های $t \ll \frac{2\pi}{\omega}$ در نظر بگیرید. به ازای این زمان‌ها، کمینه ی ولتاژ گره O را با $V_{O,min}$ و بیشینه‌ی ولتاژ این گره را با $V_{O,max}$ نمایش می دهیم و کمیت r_V را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$r_V = \frac{V_{O,max} - V_{O,min}}{V_{O,max}}$$

ت) معادلاتی را بنویسید که از حل آن ها بتوان $V_{O,min}$ و $V_{O,max}$ را به دست آورد. (۲ نمره)

ث) به ازای دو حالت $\omega RC \gg 1$ و $\omega RC \ll 1$ مقدار r_V را محاسبه کنید. در هر مورد فقط جمله ی غالب را نگه دارید. (۲ نمره)

www.iranpho.ir

سنگین ۳)

در این مساله می‌خواهیم با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی و مدلی ساده، اطلاعاتی درباره‌ی گاز نیتروژن و برهم‌کنش‌های آن به‌دست آوریم.

برای حل مساله از هر نوع کاغذ میلیمتری، لگاریتمی و نیم‌لگاریتمی دو عدد در اختیار شما قرار داده می‌شود. شما به صلاح‌دید خود از کاغذها استفاده کنید. استفاده از ماشین حساب مجاز است.

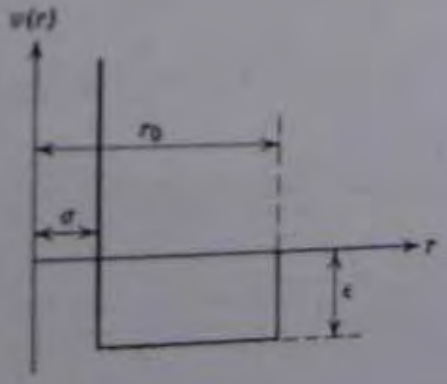
قانون گازهای کامل برای ذرات بدون برهم‌کنش برقرار است. با استفاده از مکانیک آماری می‌توان تصحیحاتی بر این قانون انجا
داد. یک گاز در نظر بگیرید که برهم‌کنش هر دو ذره‌ی آن از طریق پتانسیل $v(r)$ داده می‌شود. در این صورت اولین تصحیح به
قانون گازهای کامل این چنین است:

$$\frac{PV}{NK_BT} = 1 + a_2(T)\frac{N}{V}$$

در این رابطه P فشار، V حجم، N تعداد ذرات، K_B ثابت بولتزمن و T دما است. اگر تنها جمله‌ی اول در سمت راست را نگ
داریم، قانون گاز کامل را داریم و جمله‌ی دوم تصحیحی بر آن است و $a_2(T)$ ضریب دوم ویریال نام دارد که از رابطه‌ی (
به‌دست می‌آید:

$$a_2(T) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dr\ 4\pi r^2\ [1 - e^{-\frac{v(r)}{K_BT}}]$$

برای اتم نیتروژن مدل ساده‌ای در نظر می‌گیریم و در آن پتانسیل برهم‌کنش بین دو ذره این چنین است:



پتانسیل برهم کنش دو ذهر بر حسب فاصله

پتانسیل از $r=0$ تا $r=\sigma$ بینهایت، از $r=\sigma$ تا $r=r_0$ مقدار ثابت $-\varepsilon$ و برای $r>r_0$ پتانسیل صفر است.

الف) برای این مدل ضریب دوم ویریال، $a_2(T)$، را حساب کنید.

www.iranpho.ir

ب) داده‌های زیر از آزمایش به دست آمده است:

T(K)	$a_2(T)(cm^3/mol)$	T(K)	$a_2(T)(cm^3/mol)$
103.2	-148.64	253.2	-19.00
113.2	-118.52	273.2	-10.28
133.2	-95.50	290.0	-6.46
153.2	-72.38	303.2	-4.21
173.2	-58.44	313.2	-2.10
193.2	-43.86	323.2	-0.48
213.2	-34.31	333.2	1.00
233.2	-24.50	348.2	2.80

برای ثابت بولتزمن و عدد آووگادرو این اعداد را در نظر بگیرید:

$$K_B = 1.4 \times 10^{-23} \frac{J}{k} \qquad N_A = 6.0 \times 10^{23}$$

با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی، بهترین مقادیر σ ،r_0 و ε برای مدل ارائه شده در بخش الف را به دست آورید. σ و

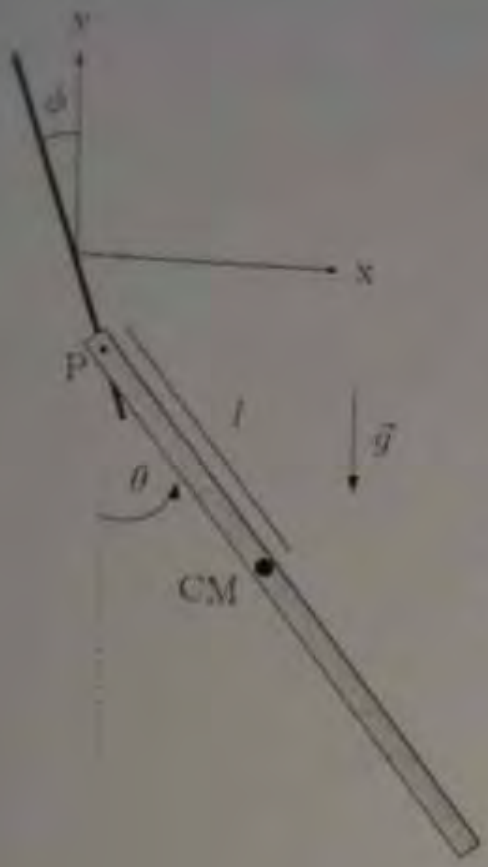
بر حسب آنگستروم و ε را بر حسب الکترون ولت گزارش کنید.

$$1\,eV = 1.6 \times 10^{-19} J \qquad 1\,A^{\circ} = 10^{-10} m$$

به مفهوم کمیت‌های مدل فکر کنید.

چندان مته به خشخاش نگذارید. لازم نیست خطا محاسبه کنید.

www.iranpho.ir



۴) یک سرِ میله‌ای به جرم m مطابق شکل به محوری (نقطه‌ی P) که بر صفحه‌ی x - y عمود است و روی خطی قرار دارد که با محور y زاویه‌ی ϕ می‌سازد لولا شده است. محور روی خط مذکور با دامنه‌ی a حرکت نوسانی با بسامد زاویه‌ای ω دارد که آن را به صورت $a\cos\omega t$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی مرکز جرم میله تا محور l است به طوری که $a \ll l$. میله همواره در صفحه‌ی x - y حرکت می‌کند و اصطکاک آن با محور قابل چشم‌پوشی است. لختی دورانی میله حول راستای عمود بر میله و گذرنده از مرکز جرم I_c است. همچنین فرض کنید $\omega^2 \gg \frac{g}{l}$.

آ) معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر θ را به دست آورید.

ب) فرض کنید $\phi = \pi/2$. در $t = 0$، به میله که آن را در زاویه‌ی $\pi - \varepsilon_0$ که ε_0 بسیار کوچک است معکوس نگه داشته‌ایم سرعت زاویه‌ای ـ اولیه‌ای می‌دهیم. مقدار این سرعت زاویه‌ای اولیه بر حسب ε_0 و سایر کمیت‌های معلوم چقدر باشد تا میله بتواند در وضعیت معکوس نوسان کند؟

اکنون می‌خواهیم برای یک ϕ ی دلخواه $\theta(t)$ را با تقریب به دست آوریم. از آن جا که نوسان سرِ لولا شده‌ی میله بسیار سریع است حرکت را می‌توان به دو بخش تند نوسان و کند نوسان جدا کرد. برای این منظور بنویسید $\theta(t) = \alpha(t) + \beta(t)$ که $\alpha(t)$ قسمت کند نوسان است و $\beta(t)$ با بسامد ω نوسان می‌کند.

پ) با توجه به کند تغییر بودن α، $\beta(t)$ را بر حسب α که آن را ثابت فرض می‌کنیم تا مرتبه‌ی اول a/l به دست آورید.

ت) با استفاده از $\beta(t)$ که در قسمت قبل به دست آوردید و میانگین‌گیری در یک دوره تناوب $2\pi/\omega$ معادله دیفرانسیلی که $\alpha(t)$ در آن صدق می‌کند به دست آورید.

www.iranpho.ir

ده از نتیجه‌ی به دست آمده در قسمت قبل انرژی پتانسیل مؤثر را بر حس

برای $\phi = 0$ و $\phi = \pi/2$ در مورد نقاط تعادل، بر حسب پارامترهای داده شده

$\phi = 0$، $\theta(t)$ را برای یک آونگ معکوس که حول راستای قائم نوسان‌های ک

ه دست آورید.

www.iranpho.ir

بسمه تعالی

امتحان دوم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ده نفر)

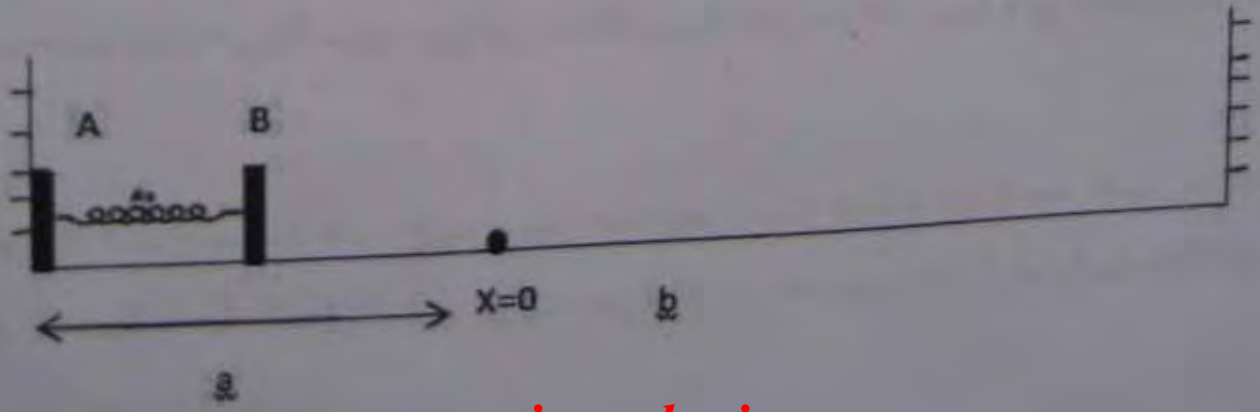
شنبه ۹۲/۱۱/۵

مدت امتحان: ۴ ساعت

۱- مطابق شکل دو جسم A و B به ضخامت ناچیز هر کدام به جرم m با فنری به ضریب k به هم متصلند. طول عادی فنر a است. در حالی که جسم A به دیواره ی سمت چپ در محل x= -a تکیه دارد و جسم B در محل x= -a/2 است. دستگاه را از حال سکون رها می کنیم. فنر باز می شود و در لحظه ی t=0 از دیوار جدا می شود.

الف- مکان هر دو جسم را در لحظه دلخواه t یعنی x_A (t) و x_B (t) را به دست آورید.

ب- فرض کنید دیواره سمت راست در x=b قرار دارد. b چقدر باشد تا جسم B بدون برخورد با دیواره راست تماس پیدا کند و حرکت در جهت مخالف تکرار شود؟

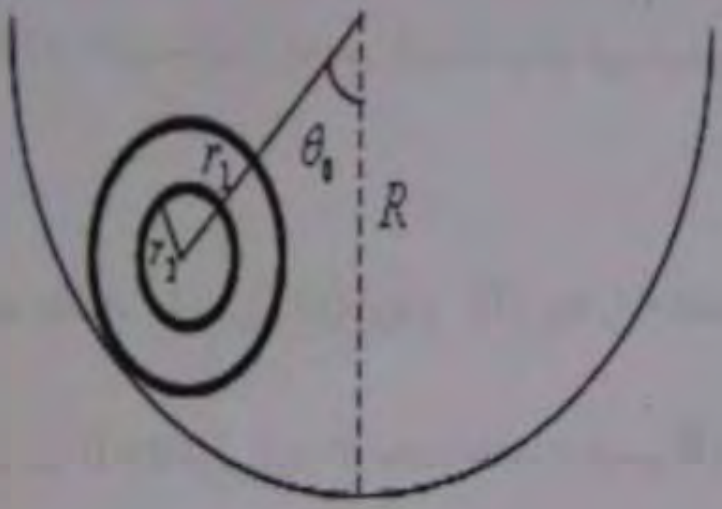


www.iranpho.ir

۲- کره‌ای به شعاع r_1 از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت بیرونی با شعاع داخلی r_2 و شعاع خارجی r_1 همیشه جامد است و قسمت داخلی آن می‌تواند در دو حالت جامد یا مایع وجود داشته باشد. در صورتی که جامد باشد به قسمت بیرونی می‌چسبد و همراه آن تشکیل یک جسم صلب را می‌دهد و در صورتی که در فاز مایع باشد بدون ویسکوزیته در نظر گرفته میشود.(گشتاوری به قسمت بیرونی وارد نمی‌کند)

چگالی هر دو قسمت در هر فاز با هم برابر است.

این کره را داخل کاسه‌ای به شعاع R ($R>r_1$) قرار می‌دهیم تا همواره بدون لغزش در صفحه‌ای قائم داخل کا
بغلتد.



الف) فرض کنید ماده‌ی کره‌ی داخلی در هنگام حرکت رو به بالا جامد باشد و در هنگام حرکت رو به پایین ما
(یعنی وقتی جسم رها شود هنگام پایین آمدن ماده‌ی کره‌ی داخلی مایع است و هنگامی که کره به پایین‌تری
نقطه‌ی کاسه رسید جامد میشود و بالا میرود. و وقتی به بالاترین نقطه‌ی حرکت رسید مایع شده و پایین می-
آیدو...).

اگر جسم از زاویه‌ی θ_0 نسبت به خط قائم (زاویه ی بین خط واصل مرکز کاسه و کره با خط قائم) رها شود
(یعنی دامنه‌ی اولیه‌ی حرکت θ_0 باشد) دامنه‌ی حرکت پس از n بار رفت و برگشت (θ_n) را بیابید($\theta_0 \ll 1$)

ب) دوره‌ی تناوب حرکت را محاسبه نمایید.

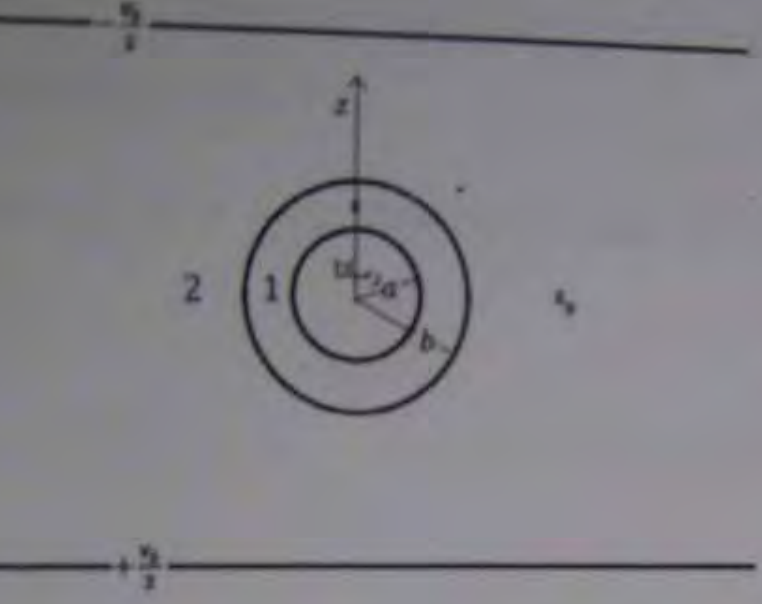
www.iranpho.ir

ج) حال فرض کنید ماده‌ی کره‌ی داخلی در هنگام حرکت رو به بالا مایع و در هنگام حرکت رو به پایین جامد باشد. با فرض θ_0 به عنوان دامنه‌ی اولیه، مجددا دامنه‌ی حرکت پس از n بار رفت و برگشت (θ_n) را در این حالت بیابید. ($\theta_0(1)$)

د) با فرض r_1) و r_2 دوره‌ی تناوب حرکت را برای حالت (ج) تا دومین تصحیح ناصفر محاسبه نمایید.

www.iranpho.ir

۳- کره‌ی رسانای بدون باری به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع a در نظر بگیرید که پوسته‌ای کروی شکل از ماده‌ای با گذردهی الکتریکی ε و به شعاع خارجی b، آن را احاطه کرده است. مجموعه‌ی کره‌ی رسانا و پوسته‌ی دی الکتریک بین دو صفحه‌ی بسیار بزرگ و رسانا قرار داده شده است. این دو صفحه، در $z = \frac{D}{2}$ و $z = -\frac{D}{2}$ قرار دارند و به ترتیب دارای پتانسیل $-\frac{V_0}{2}$ و $+\frac{V_0}{2}$ هستند. فرض کنید $D \gg b$ و در محاسبات، تنها اولین تصحیح ناصفر مجموعه‌ی کره‌رسانا و پوسته‌ی دی الکتریک بر میدان ناشی از صفحات رسانا را در نظر بگیرید.



الف) میدان الکتریکی را در این مسئله می‌توانید به روش تصویر بیابید. میدان الکتریکی در ناحیه ی ۲ مشخص شده در شکل را می توان به صورت برآیند میدان الکتریکی ناشی از صفحات و میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی $\vec{p}_1$ در نظر گرفت. همچنین میدان الکتریکی در ناحیه ی ۱ مشخص شده در شکل را می توان به صورت برآیند میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی $\vec{p}_2$ و α برابر میدان الکتریکی ناشی از صفحات رسانا به دست آورد. $\vec{p}_1$، $\vec{p}_2$ و ضریب α را بیابید. محل دوقطبی های تصویر در نظر گرفته شده را مشخص کنید. (۴ نمره)

ب) میدان الکتریکی $\vec{E}$ و بردار جابه جایی الکتریکی $\vec{D}$ را در مختصات کروی (r, θ)، در نواحی ۱ و ۲، به ازای $r \ll D$، به دست آورید. (۱ نمره)

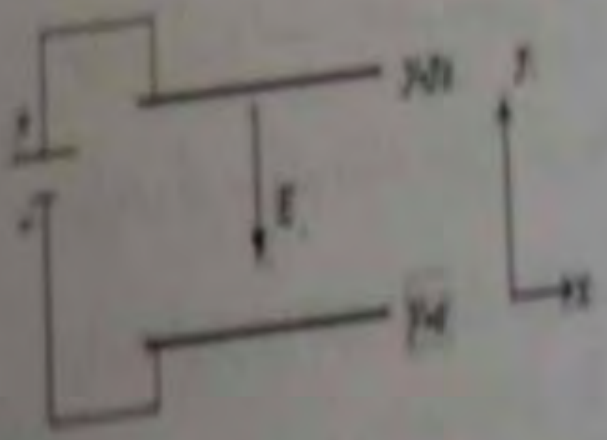
ب) چگالی بار سطحی القا شده روی کره رسانا را به دست آورید. (۱ نمره)

پ) چگالی حجمی و چگالی سطحی بارهای قطبشی را بیابید. (۲ نمره)

ت) نیروی الکتریکی برآیند وارد بر نیمه‌ی بالایی مجموعه‌ی کره‌ی رسانا و پوسته‌ی دی الکتریک (واقع در $z > 0$) را به دست آورید. (۲ نمره)

www.iranpho.ir

۴- فضای بین دو صفحه ی یک خازن تخت که مساحت هر یک از صفحه های آن A است با ماده ای به ضریب دی الکتریک متغیر $k = 1 + \frac{x}{x_0}$ کاملا پر شده است که x فاصله از صفحه‌ی پایینی خازن است. مطابق شکل صفحه ی پایینی خازن در $x=0$ و صفحه ی بالایی خازن در $x=x_0$ واقع است. با صرف نظر از اثرات لبه:



ا) ظرفیت خازن را برحسب ε_0, x_0, A محاسبه نمایید که ε_0 ضریب گذردهی خلا است.

ب) اگر در اثر اعمال یک اختلاف پتانسیل ثابت بین صفحات، چگالی بار آزاد سطحی روی صفحات $\pm\sigma_f$ شود:

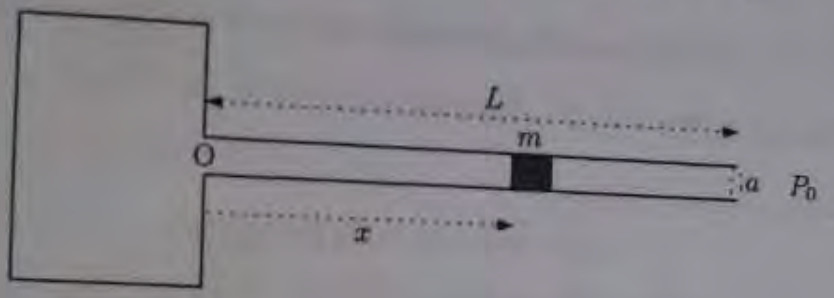
ب-۱) چگالی بار قطبشی سطحی را در $x = x_0$ و $x = 0$ به دست آورید.

ب-۲) چگالی بار قطبشی حجمی $\rho(x)$ را در نقطه ای به فاصله ی x از صفحه پایینی به دست آورید.

ب-۳) بار کل قطبشی حجمی و بار کل قطبشی سطحی چقدر است؟

www.iranpho.ir

۵) اساس کار تفنگ بادی شتاب دادن به یک گلوله به وسیله‌ی یک گاز متراکم است. مطابق شکل یک تفنگ بادی در نظر بگیرید که جرم گلوله‌ی آن m، طول لوله‌ی آن L و مساحت سطح مقطع لوله‌ی آن a است. حجم مخزن گاز (حجم گاز وقتی گلوله در نقطه‌ی O است) را V_0 و فشار اولیه‌ی گاز متراکم (فشار مخزن گاز وقتی گلوله در نقطه‌ی O است) را $P(0)$ بگیرید. همچنین گاز را ایده‌آل فرض کنید با تعداد مول n، جرم مولی M و ضریب اتمیسیته‌ی (نسبت ظرفیت گرمایی در فشار ثابت به ظرفیت گرمایی در حجم ثابت) γ. فشار هوای بیرون را P_0 بگیرید.



آ) معادله‌ای بنویسید که سرعت گلوله را داخل لوله وقتی در فاصله‌ی x از O قرار دارد به دست دهد. برای این منظور چند فرض معقول کنید.

- از آن جا که انبساط گاز داخل مخزن تا وقتی گلوله به انتهای لوله می‌رسد بسیار سریع است، تحول را بی‌دررو فرض کنید.
- برای به حساب آوردن سرعت مرکز جرم گاز درون لوله در حین حرکت گلوله، یک جرم متوسط مانند m_g به گاز داخل لوله از $x = 0$ تا $x = L$ نسبت دهید که سرعت‌اش نصف سرعت گلوله است. m_g را بر حسب سایر کمیت‌های داده شده به دست آورید. از حرکت گاز داخل حجم V_0 چشم بپوشید و چگالی گاز را در نقاط مختلف لوله و مخزن یکسان بگیرید.
- فرض کنید یک پرده‌ی دیافراگم در محل اتصال لوله به مخزن و پشت گلوله (در نقطه‌ی O) وجود دارد که وقتی فشار داخل مخزن به مقدار $P(0)$ می‌رسد این دیافراگم پاره می‌شود و گاز با گلوله تماس پیدا می‌کند و به گلوله شتاب می‌دهد. کار لازم برای پاره کردن دیافراگم را w بگیرید.

ب) سرعت گلوله هنگام خروج از لوله را بر حسب کمیت‌های بدون بعد $W = w/P_0aL$،

www.iranpho.ir

$\delta = m_g/m$، $r = aL/V_0$ و $C = P(0)/P_0$ به دست آورید.

پ) به ازای $m = 1.0\,\mathrm{g}$، $a = 2.45 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2$، $V_0 = 16\,\mathrm{cm}^3$، $P(0) = 200\,\mathrm{atm}$، $L = 30\,\mathrm{cm}$ و $W = 75$ تعیین کنید کدام یک از سه گاز زیر منجر به سرعت خروج بیشتری برای گلوله می‌شود.

- هوا: برای هوا $\gamma = 1.4$، $M = 29\,\mathrm{g/mol}$ و جرم کل گاز $3.84\,\mathrm{g}$ است.
- گاز هیدروژن: برای گاز هیدروژن $\gamma = 1.4$، $M = 2\,\mathrm{g/mol}$ و جرم کل گاز $0.27\,\mathrm{g}$ است.
- گاز دی‌اکسیدکربن: برای دی‌اکسیدکربن $\gamma = 1.3$، $M = 44\,\mathrm{g/mol}$ و جرم کل گاز $5.84\,\mathrm{g}$ است. ثابت جهانی گازها $R = 8.31\,\mathrm{J/mol \cdot K}$ است.

ت) می‌توان طول لوله را طوری اختیار کرد که سرعت خروج گلوله از لوله بیشینه شود. برای هوا بهترین طول لوله چقدر است؟

www.iranpho.ir

بسمه تعالی

امتحان سوم المپیاد فیزیک(دوره ی ۱۰ نفر)

مدت امتحان: ۴/۵ ساعت ۹۲/۱۲/۱۰

۱) فرض کنید در نقطه ای روی زمین با طول و عرض جغرافیایی به ترتیب θ_1,Φ_1 قرار داریم

الف) در چه جهتی نسبت به شمال (نصف النهار گذرنده از ما) روی زمین حرکت کنیم تا با کمترین طول مسیر به نقطه ای با طول و عرض جغرافیایی θ_2,Φ_2 برسیم (دایره عظیمه روی کره زمین گذرنده از مبدا و مقصد را در نظر بگیرید)

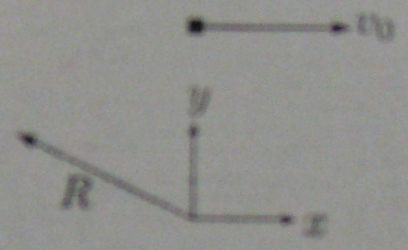
ب) موشکی با سرعت اولیه V_0 از مبدا تحت چه زاویه ی α نسبت به افق پرتاب کنیم تا به مقصد اصابت کند(حرکت در صفحه همان دایره عظیمه الف است). در این سوال زمین را کره ای ساکن در نظر بگیرید و از مقاومت هوا صرفنظر کنید

ج) فرض کنید حداکثر سرعت پرتاب موشک V باشد. مکان هندسی نقاط تحت تیررس ما عرقچینی به زاویه نیم راس θ است. θ را بیابید

د) V را به گونه ای بیابید که تمام سطح کره زمین تحت تیررس ما باشد

www.iranpho.ir

۲) رویِ سطحِ گلوله‌ای سبک و به شعاعِ R جرمِ نقطه‌ای‌یِ m را چسبانده‌ایم. از جرمِ گلوله در مقابلِ m چشم‌پوشی کنید. ضربه‌ای اُفقی به ذره می‌زنیم به طوری‌که سرعتِ اولیه‌یِ آن v_{0i} شود. فرض کنید اصطکاکِ بینِ گلوله و زمین آن‌قدر هست که تا وقتی رویِ زمین حرکت می‌کند حتماً می‌غلتد. مبداءِ مختصات را مکانِ اولیه‌یِ مرکزِ گلوله بگیرید.



الف) آیا مقادیری برایِ v_{0i} وجود دارد که گلوله همان ابتدا از زمین بلند شود؟ اگر جواب منفی است، چرا؟ توضیح دهید. اگر جواب مثبت است، چرا؟ و به ازایِ چه مقادیری؟

ب) آیا مقادیری برایِ $v_{0i} \neq 0$ وجود دارد که گلوله اصلاً از زمین بلند نشود؟ اگر جواب منفی است، چرا؟ توضیح دهید. اگر جواب مثبت است، چرا؟ و به ازایِ چه مقادیری؟

ج) فرض کنید v_{0i} آن‌قدر باشد تا گلوله پس از مدتی غلتش بالاخره از زمین بلند شود. سرعتِ مرکزِ گلوله در لحظه‌یِ جداشدن چه‌قدر است؟ حدِّ بالایِ جابه‌جایی‌یِ مرکزِ گلوله تا زمانِ بلند شدنِ آن از زمین چه‌قدر است؟

www.iranpho.ir

۳) مراکز دو کره ی رسانا، هر یک به شعاع a، روی محور z و در $z=d$ و $z=-d$ قرار دارند که $d \gg a$. دو کره در محیطی به رسانندگی الکتریکی σ قرار دارند که در مقایسه با رسانندگی کره ها، مقدار کوچکی است. کره-ی واقع در $z=d$، در پتانسیل الکتریکی V_0 و کره‌ی واقع در $z=-d$، در پتانسیل الکتریکی $-V_0$ قرار دارد. در پاسخ به هر بخش از مسئله فقط جمله‌ی غالب نسبت به $\frac{a}{d}$ را نگه دارید.

الف) $\vec{J}$، چگالی جریان الکتریکی را در حالت پایا، در سراسر فضا بیابید. (۱ نمره)

ب) P، توان تلف شده در محیط رسانا را محاسبه کنید. (۲ نمره)

پ) $\vec{B}$، میدان مغناطیسی را در صفحه‌ی $z=0$ به دست آورید. (۳ نمره)

حال فرض کنید فقط ناحیه ی $z<b$، از ماده ی به رسانندگی الکتریکی σ پر شده است و ناحیه ی $z>b$ خلأ است. همچنین فرض کنید $b>d$. سایر شرایط مسئله را شرایط حاکم در بخش‌های پیشین مسئله در نظر بگیرید.

ت) $\vec{J}$، چگالی جریان الکتریکی را در حالت پایا، در سراسر فضا بیابید. (۲ نمره)

ث) R، مقاومت الکتریکی بین دو کره‌ی رسانا را محاسبه کنید.

(۲ نمره)

www.iranpho.ir

۴) در این سوال می‌خواهیم مدلی کلاسیک برای الکترون را بررسی کنیم.
الکترون را کُره‌ای توپُر با چگالی یکنواخت بار و جرم در نظر بگیرید. شعاع الکترون را R ، جرم آن را m و بار آن را e می‌گیریم. برای توصیف اسپین الکترون مدل اولیه، مبتنی بر چرخش این کُره به دور خودش بود. می‌خواهیم این مدل را پیگیری کنیم. فرض می‌کنیم الکترون با سرعت زاویه‌ای ω به دور محور z می‌چرخد. مرکز کُره را مبدا مختصات می‌گیریم.

الف) اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای را بنویسید. اگر کشتاور لختی را به یاد دارید، محاسبه‌ی آن اجباری نیست! اگر به یاد ندارید، بالطبع باید حساب-کتاب کنید.

ب) جناب گریفیث عزیز پتانسیل برداری حاصل از یک پوسته‌ی کُروی به شعاع a و چگالی سطحی ثابت σ را که با سرعت ثابت ω می‌چرخد محاسبه کرده است:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 a \sigma}{3} \omega \hat{z} \times \mathbf{r} & r < a, \\ \frac{\mu_0 a^4 \sigma}{3 r^3} \omega \hat{z} \times \mathbf{r} & r > a. \end{cases}$$

با استفاده از این روابط پتاسیل برداری الکترون را در تمامی فضا حساب کنید.

ج) میدان مغناطیسی را در تمام فضا حساب کنید. پیچش(کِرل) در مختصات کُروی چنین است:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right] \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi} \end{aligned}$$

د) با محاسبه‌ی مستقیم و یا با برقراری یک همسانی از محاسبات قسمت‌های قبل با دانش الکترومغناطیس خود ممان دوقطبی مغناطیسی الکترون، μ، را بر حسب ثوابت مساله بنویسید.

ه) نسبت ممان دو قطبی مغناطیسی الکترون به تکانه‌ی زاویه‌ای آن را حساب کنید.

و) بنابر داده‌های آزمایشگاهی ممان دوقطبی الکترون در واحدهای استاندارد (SI) 10^{-23} است. با محاسباتی ساده می‌توان نشان داد که شعاع کلاسیکی الکترون، R از مرتبه‌ی فمتومتر (10^{-15}) است. بار الکترون $1,6 \times 10^{-19}$کولن است. با استفاده از این داده‌ها سرعت زاویه‌ای الکترون را به دست آورید.

ز) سرعت نقطه‌ای از الکترون که روی استوای آن است را حساب کنید. عدد گزارش کنید.

ح) چگالی نیروی گریز از مرکز را روی استوا حساب کنید. جرم الکترون را 10^{-30} کیلوگرم بگیرید.

www.iranpho.ir

د) در این مساله می‌خواهیم اطلاعاتی درباب یک اجاق گاز خانگی به دست آوریم.
گاز شهری حاوی متان است. فشار گاز در داخل لوله‌ها در حدود ۱.۰۲ اتمسفر است. برای ساده‌سازی فرض می‌کنیم که گاز از طریق یک سوراخ به قطر یک میلی‌متر خارج می‌شود و سر شعله در نتیجه‌ی ترکیب با اکسیژن هوا می‌سوزد.

الف) از آنجا که فشار داخل لوله و هوای بیرون تفاوت چندانی ندارد در این بخش فرض می‌کنیم چگالی گاز بر اثر خروج از لوله تغییر چندانی نمی‌کند. با استفاده از این فرض و در نظر گرفتن اندازه‌ای مناسب برای لوله‌ی ورودی، نسبت سرعت گاز درون لوله به سرعت گاز پس از خروج از سوراخ را بیابید. یافتن مرتبه‌ی بزرگی کافی است.

ب) این یک فرآیند جریان است. با استفاده از نتیجه‌ی منطقی‌ای که از محاسبه‌ی بخش قبل می‌توان گرفت و فرض بی‌دررو بودن خروج گاز از سوراخ(دیگر باید تغییر فشار را در نظر گرفت!) سرعت خروج گاز متان از سوراخ را بیابید. متان را گازی کامل بگیرید. پاسخ را بر حسب اختلاف فشار درون لوله و هوا، δP که نسبت به فشار هوا بسیار کوچک است، فشار هوا، P_0 ، ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت، c_v ، نسبت طرفیت گرمایی در فشار ثابت به ظرفیت گرمایی در حجم ثابت، γ ، دمای هوای محیط، T_0 ، ثابت گازهای کامل، R و جرم مولی متان، M بنویسید.

ج) برای مقادیر عددی زیر سرعت خروج گاز را بیابید.

$$M = ۱۶\frac{gr}{mol} \qquad c_p = ۲,۲۲\frac{kJ}{kgK} \qquad c_v = ۱,۷\frac{kJ}{kgK} \qquad R = ۸,۳\frac{J}{molK}$$

انتظار داریم که دمای نوعی هوای اتاق را شما بدانید ؛)

د) با استفاده از بخش قبل حجم گاز خروجی بر واحد زمان، Φ و مقدار مول گاز خروجی بر واحد زمان، $\frac{dn}{dt}$ را حساب کنید. شما باید مقدار عددی این کمیت‌ها را گزارش کنید.

ه) واکنش سوختن یک مول متان را به شکلی ساده می‌توان چنین گرفت:

$$CH_۴ + ۲O_۲ \longrightarrow CO_۲ + ۲H_۲O$$

با استفاده از جدول زیر که آنتالپی ترکیبات شیمیایی در آن آمده است، گرمای حاصل از سوختن یک مول متان را حساب کنید. جدول در صفحه‌ی بعد آمده است.

و) با استفاده از اطلاعاتی که تا به اینجا به دست آوردید، توان گرمایشی اجاق را حساب کنید. شما باید عدد گزارش کنید.

www.iranpho.ir

ماده	$H\frac{kJ}{mol}$
CH_4	-۷۴۸
CO_2	-۳۹۳
H_2O	-۲۴۲
O_2	۰

ز) فرض کنید دو لیتر آب لوله‌کشی را درون کتری می‌ریزید تا جوش بیاید و چای درست کنید. چه قدر طول می‌کشد تا با این اجاق آب جوش بیاید؟

$$C_{water} = ۴,۲\frac{kJ}{kgK} \qquad \rho_{water} = ۱۰۰۰\frac{kg}{m^3}$$

ح) حال می‌خواهیم دمای شعله را پیدا کنیم. به عنوان مدلی ساده برای سوختن گاز متان می‌توان این طور فرض کرد که ابتدا فرآیند ترکیب در دمای ثابت صورت می‌گیرد و گرمایی آزاد می‌شود. این گرما را برای یک مول متان در بخش ه) محاسبه کردید. در بخش دوم فرآیند، گرمای به دست آمده از بخش اول صرف بالا بردن دمای فرآورده‌ها می‌شود. باید دقت کنیم که در هنگام بالا بردن دما و استفاده از گرمای تولیدی هوای اطراف هم حضور دارد. به این ترتیب به طور ساده، گرمای ناشی از سوختن یک مول متان صرف بالا بردن دمای یک مول دی‌اُکسید کربن، دو مول آب و چیزی در حدود هفت‌ونیم مول نیتروژن می‌شود. ظرفیت گرمایی گازها را می‌توان تقریبن ثابت گرفت. با استفاده از این اطلاعات دمای شعله را حساب کنید.

$$c_{gas} = ۳۲\frac{J}{molK}$$

ط) حال می‌خواهیم رنگ شعله را به دست آوریم. رنگ شعله ناشی از تغییر ترازهای کوانتومی است. در این مورد به علت برانگیختگی‌های باندهای CH است که در فرایندهای میانی ظاهر می‌شود.

باید از مکانیک کوانتومی استفاده کنیم. اما نمی‌خواهیم وارد جزئیات آن شویم. ابتدا انرژی جنبشی یک ذره که با سرعتی ثابت می‌چرخد را بر حسب تکانه‌ی زاویه‌ای آن، L و گشتاور لختی آن، I بنویسید.

ی) بنابر مکانیک کوانتومی تکانه‌ی زاویه‌ای هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد. به اصطلاح کوانتیده است :

$$L = n\hbar \qquad \hbar := \frac{h}{۲\pi}$$

www.iranpho.ir

که در آن n عددی طبیعی و h ثابت پلانک است.

از سوی دیگر انرژی یک فوتون که تابش می‌شود از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E = h\nu$$

که در آن ν فرکانس نور تابشی است.

در مساله‌ی ما عمل یک الکترون در حال چرخش به دور هسته است. شعاع دوران الکترون را یک آنگستروم بگیرید. فرض کنید که تکانه‌ی زاویه‌ای الکترون h است. انرژی جنبشی الکترون را برابر با انرژی فوتون تابشی بگذارید و از آنجا طول موج نور تابشی را حساب کنید. پاسخ را بر حسب نانومتر گزارش کنید.

$$h = ۶.۶ \times ۱۰^{-۳۴} J.s \qquad m_{electron} = ۱۰^{-۳۰} kg \qquad c = ۳ \times ۱۰^{۸} \frac{m}{s} \qquad (۱)$$

ک) پس از امتحان بروید و جستجویی کنید و ببینید آنچه به دست آورده‌اید با مشاهده‌ی روزمره‌تان می‌خواند یا که نه! و در نهایت ... خسته نباشید :)

www.iranpho.ir